SHIVALIK SR. SEC. SCHOOL, BHARTHARI ROAD, BEHROR

CLASS XI (LESSON- I)

मात्रक विमायें तथा मापन

SUBJECT- Physics (Ajay Kumar Gupta Sir)

- **भौतिक राशियाँ–** वे राशियाँ जिन्हें मापा या तोला जा सके, भौतिक राशियाँ कहलाती है। जैस– द्रव्यमान, लम्बाई, समय, आदि। भौतिक राशियाँ दो प्रकार की होती है।
- **मूल राशियाः–** वे भौतिक राशियाँ जो अन्य किसी भी राशि पर निर्भर नहीं करती है, मूल राशियाँ कहलाती है। जैसे– लम्बाई, द्रव्यमान, समय आदि।
- **व्युत्पन्न राशियाँः–** वे भौतिक राशियाँ जो मूल राशि से व्युत्पन्न की जाती है तथा इन राशियों पर निर्भर करती है, व्युत्पन्न राशियाँ कहलाती है। जैसे– संवेग, बल कार्य आदि।
- **मात्रकः–** भौत्तिक राशि के मापन के लिए नियत किये गये मान को मात्रक कहते है।

भौतिक राशि का मात्रक उसके आंकिक मान के व्युत्क्रमानुपाती होता है अर्थात् $u \, \alpha \frac{1}{n}$

जहाँ पर u व n क्रमशः किसी भी भौत्तिक राशि का मात्रक व संख्यात्मक मान है।

मात्रक एवं संख्यात्मक मान में सम्बन्ध

$$n_1 u_1 = n_2 u_2$$

मात्रकों की पद्धतिः– सभी प्रकार की भौतिक राशियों के लिए मूलभूत तथा व्युत्पन्न दोनों मात्रकों का समुच्चय मात्रकों की पद्धति कहलाती है।

प्रचलित पद्धतियाँ निम्न प्रकार है–

(1) **CGS पद्धति–** यह पद्धति मात्रकों की गॉसीय पद्धति भी कहलाती है। इसमें लम्बाई, द्रव्यमान तथा समय, मूलभूत राशियों के रूप में ली जाती है तथा इनके संगत मात्रक क्रमशः सेन्टीमीटर (cm), ग्राम (g) तथा सैकण्ड (s) होते है।

(2) **MKS पद्धति–** यह पद्धति जॉर्जी (Gorgi) पद्धति भी कहलाती है। इस पद्धति में भी लम्बाई, द्रव्यमान तथा समय मूलभूत राशियों के रूप में लिये जाते है तथा इनके संगत मूल मात्रक मीटर, किलाग्राम तथा सैकण्ड होते है।

(3) **FPS पद्धति–** इस पद्धति में फुट, पॉउण्ड तथा सैकण्ड क्रमशः लम्बाई, द्रवयमान तथा समय के लिए मूलभूत मात्रक लिये जाते है। इस

(4) **S.I. पद्धति–** यह मात्रकों की अन्तर्राष्ट्रीय पद्धति है तथा सम्पूर्ण भौतिकीं में प्रयुक्त होने वाली विस्तृत पद्धति है। इस पद्धति में सात मूलभूत राशियाँ है। ये राशियाँ तथा इनके मात्रक निम्न तालिका में दिये गये है।

मात्रक तथा राशियों के संकेत

Unit and symbol of quantities

राशि	मात्रक का नाम	प्रतीक्
लम्बाई	मीटर (Metre)	m
द्रव्यमान	किलोग्राम (Kilogram)	kg
समय	सैकण्ड (Second)	s

विद्युत–धारा	ऐम्पियर (Ampere)	A
ताप	केल्विन (Kelvin)	K
पदार्थ की मात्रा	मोल (Mole)	mol
ज्योति तीव्रता	केण्डेला (Candela)	cd

उपरोक्त सात मूलभूत राशियों के अतिरिक्त दो पूरक राशियाँ होती है जिनके मात्रक निम्न है– समतल कोण के लिए रेडियन (rad) तथा घन कोण के लिए स्टेरेडियन (sr)

नोट– मूलभूत तथा व्युत्पन्न मात्रकों के अतिरिक्त हम कई बार व्यववहारिक मात्रकों का भी उपयोग करते है। ये व्यवहारिक मात्रक मूलभूत अथवा व्युत्पन्न किसी भी प्रकार के हो सकते है। उदाहरण के लिए प्रकाश वर्ष दूरी का व्यवहारिक मात्रक (मूलभूत) है जबकि अश्वशक्ति, शक्ति का व्यवहारिक (व्युत्पन्न) मात्रक है।

व्यवहारिक मात्रक, मात्रकों की पद्धति में हो सकता है और नही भी लेकिन इसे मात्रकों की किसी भी पद्धति में व्यक्त किया जा सकता है।

उदाहरण के लिए 1 mile = 1.6 km = 1.6×10^3m.

- **S.I. पूर्वलग्न (S.I. Prefixes) :–** भौतिकी में बहुत सूक्ष्म (माइक्रो) से बहुत बड़े (मेक्रा) परिमाणों का अध्ययन करते है। जैसे एक ओर हम किसी परमाणु के बारे में बात करते है जबकि दूसरी तरफ ब्रम्ह्मण्ड की बात करते है। उदाहरण के लिए इलेक्ट्रॉन का द्रव्यमान 9.1×10^{-31} kg है जबकि सूर्य का द्रव्यमान 2×10^{30} kg है। ऐसे बड़े अथवा छोटे परिमाणों को व्यक्त करने हेतु हम निम्न पूर्व लग्नों का प्रयोग करते है।

पूर्वलग्न तथा संकेत

10 की घात	पूर्वलग्न	प्रतीक
10^{18}	(Exa) ऐक्सा	E
10^{15}	(Peta) पीटा	P
10^{12}	(tera) टेरा	T
10^{9}	(giga) गीगा	G
10^{6}	(mega) मेगा	M
10^{3}	(Kilo) किलो	k
10^{2}	(Hector) हेक्टो	h
10^{1}	(Deca) डेका	da
10^{-1}	(deci) डेसी	d
10^{-2}	(Centi) सेन्टी	c
10^{-3}	(milli) मिली	n
10^{-6}	(Micro) माइक्रो	p
10^{-9}	(nano) नेनो	N

10^{-12}	(Pico) पिको	P
10^{-15}	(femto) फेम्टो	f
10^{-18}	(Atto) एट्टो	A

➢ लम्बाई, द्रव्यमान तथा समय के मात्रक

(1) लम्बाई:– मानक मीटर को प्रकाश की तरंगदैर्ध्य के पदों में परिभाषित किया गया है, इसे लम्बाई का परमाणवीय मानक कहते है।

''क्रिप्टॉन–86 परमाणु के द्वारा निर्वात् में उत्सर्जित नांरगी लाल रंग की 1650763.73 तरंगो की लम्बाई 1 मीटर कहलाती है''।

एक अन्य परिभाषानुसार– प्रकाश के द्वारा निर्वात् में 1/299,792,.458 सैकण्ड में तय की दूरी 1 मीटर कहलाती है।

(2) **द्रव्यमान:–** मापन के अन्तर्राष्ट्रीय ब्यूरो में प्लेटीनम इरीडीयम मिश्रधातु से बने एक मानक बेलन का द्रव्यमान 1 कि.ग्रा. परिभाषित किया गया है।

परमाणवीय मानक पर आधारित परिभाषानुसार – $6C^{12}$ (कार्बन का समस्थानिक) तत्व के 5.0188×10^{25} परमाणुओं का द्रव्यमान 1 कि.ग्रा. के तुल्य होता है।

(3) **समय:** सीजियम–133 परमाणु के विकिरण के 9,192,631,770 कम्पनों में लगने वाला समयान्तराल 1 सैकण्ड के तुल्य होता है। यह विकिरण Cs- 133 की मूल अवस्था के दो सूक्ष्म स्तरों के बीच होने वाले संक्रमण के तुल्य होता है।

➢ व्यवहारिक मात्रक

(1) लम्बाई

(i) 1 फर्मी $= 1\ fm = 10^{-15}\ m$

(ii) 1 एक्स–रे मात्रक $= 1\ XU = 10^{-13}\ m$

(iii) 1 एंग्स्ट्रॉम $= 1\ A^o = 10^{-10}\ m = 10^{-8}\ cm = 10^{-7}\ mm = 0.1\ \mu m$

(iv) 1 माइक्रोन $= 1\ \mu m = 10^{-6}\ m$

(v) 1 खगोलीय मात्रक $= 1\ AU = 1.49 \times 10^{11}\ m$

$= 1.5 \times 10^{11}\ m = 1.5 \times 10^{8}\ km$

(vi) 1 प्रकाशवर्ष $= 1\ ly = 9.46 \times 10^{15}\ m$

1 पारसेक = 1pc = 3.26 प्रकाश वर्ष $= 3.08 \times 10^{16} m$

(2) द्रव्यमान:–

(i) चन्द्रशेखर इकाई :– 1 CSU = सूर्य के द्रव्यमान का 1.4 गुना = $2.8 \times 10^{30} kg$

(ii) मीट्रिक टन = 1000कि.ग्रा.

(iii) 1 क्विण्टल = 100 कि.ग्रा.

(iv) परमाणवीय द्रव्यमान मात्रक:

1.67×10^{-27} kg प्रोटॉन अथवा न्यूट्रॉन का द्रव्यमान 1 amu की कोटि का होता है।

(3) **समय**

(i) वर्ष– सूर्य के चारो ओर पृथ्वी को अपनी कक्षा में एक चक्र पूर्ण करने में लगा समय 1 वर्ष होता है।

(ii) **चन्द्रमास–** पृथ्वी के चारो ओर चन्द्रमा द्वारा अपनी कक्षा में एक चक्र पूर्ण करने में लगा समय 1 चन्द्रमास होता है। 1 चन्द्रमास = 27.3 दिन

(iii) **सौर दिवसः–** सूर्य के सापेक्ष पृथ्वी द्वारा अपनी अक्ष के पारित एक पूर्ण घूर्णन में लगा समय और सौर दिन कहलाता है। चूँकि यह समय दिन–प्रतिदिन परिवर्तित होता रहता है। अतः एक वर्ष में सभी दिनों के अन्तरालों का औसत सौर दिन ज्ञात किया जाता है।

1 सौर वर्ष = 365.25 औसत सौर दिवस

अथवा औसत सौर दिवस = सौर वर्ष का $\frac{1}{365.25}$ भाग

(iv) सैडरियल दिवसः– किसी दूरस्थ तारे के सापेक्ष पृथ्वी द्वारा अपनी अक्ष के परितः एक पूर्ण घूर्णन में लगा समय एक सैडरियल दिवस कहलाता है।

1 सौर वर्ष = 366.25 सेडरियल दिवस = 365.25 औसत सौर दिन अतः 1 सैडरियल दिवस 1 सौर दिवस से कम होता है।

(v) शेक (Shake) यह समय का व्यवहारिक किन्तु प्राचीन मात्रक है 1 शेक $=10^{-8}$ सैकण्ड

➢ भौतिक राशियों की विमाएँः–

जब किसी व्युत्पन्न राशि को मूलभूत राशि के पदों में व्यक्त किया जाता है तो इसे मूलभूत राशियों की विभिन्न घातों के गुणनफल के रूप में लिखा जाता है। इन घातों को, जिन्हें दी गई भौतिक राशि व्यक्त करने के लिए लगाया जाता है, वितायें कहते है।

बल= द्रव्यमान x त्वरण

$= \frac{\text{द्रव्यमान} \times \text{वेग}}{\text{समय}} \qquad = \frac{\text{द्रव्यमान} \times \text{लम्बाई} / \text{समय}}{\text{समय}}$

=द्रव्यमान x लम्बाई x $(\text{समय})^{-2}$

अतः बल की विमाये द्रव्यमान में लम्बाई में 1 तथा समय में –2 है।

यहाँ भौतिक राशि जिसे मूल राशियों के पदों में व्यक्त किया जाना है बड़े कोष्ठक में लिखा जाता है। जो यह प्रदर्शित करता है कि समीकरण विमाओं के मध्य है न कि परिमाणों के मध्य।

अतः उपरोक्त सम्बन्ध निम्न प्रकार लिखा जाता है।

(बल) = $[M^1L^1T^{-2}]$

मूलभूत राशियों के पदों में भौतिक राशि का व्यंजक विमीय समीकरण कहलाता है। यदि हम इस समीकरण के केवल दाहिने भाग पर विचार करे तो व्यंजक सूत्र कहलाता है।

अतः बल का विमीय सूत्र $[M^1L^1T^{-2}]$ होगा।

➢ समान विमाओं वाली भौतिक राशियाँ–

Dimension	राशियाँ
$[M^0 L^0 T^{-1}]$	आवृति, कोणीय, आकृति, कोणीय वेग, वेग प्रवणता तथा क्षय नियतांक
$[M^1 L^2 T^{-2}]$	कार्य, आन्तरिक ऊर्जा, स्थितिज ऊर्जा, गतिज ऊर्जा, बल, आघूर्ण, बल का आघूर्ण
$[M^1 L^{-1} T^{-2}]$	दाब, प्रतिबल, यंग प्रत्यास्थता गुणांक, आयतन प्रत्यास्थता गुणांक, दृढ़ता गुणांक, ऊर्जा घनत्व
$[M^1 L^1 T^{-1}]$	संवेग, आवेग
$[M^0 L^1 T^{-2}]$	गुरूत्वीय त्वरण, गुरूत्वीय क्षेत्र की तीव्रता
$[M^1 L^1 T^{-2}]$	प्रणोद, बल, भार, ऊर्जा प्रवणता
$[M^1 L^2 T^{-1}]$	कोणीय संवेग तथा प्लांक नियतांक
$[M^1 L^0 T^{-2}]$	पृष्ठ तनाव, पृष्ठीय ऊर्जा (ऊर्जा प्रति इकाई क्षेत्रफल)
$[M^0 L^0 T^0]$	विकृति, अपवर्तनांक, आपेक्षिक घनत्व, कोण, घन कोण, दूरी, प्रवणता, आपेक्षिक विद्युतशीलता (परावैद्युतांक) आपेक्षिक चुम्बकनशीलता आदि।
$[M^1L^2T^{-2}\,\theta^{-1}]$	गुप्त ऊष्मा तथा गुरूत्वीय विभव
$[M^0 L^0 T^1]$	$\sqrt{l/g}, \sqrt{m/k}, \sqrt{R/g}$, जहाँ l = लम्बाई g = गुरूत्वीय त्वरण, m = द्रव्यमान, k = स्प्रिंग नियतांक, R = पृथ्वी की त्रिज्या
$[M^0 L^0 T^1 A^0]$	L/R, $\sqrt{LC}$,RC जहाँ L = प्रेरकत्व, R = प्रतिरोध, C = धारिता
$[M^1 L^2 T^{-2} A^0]$	I^2 Rt, $\frac{V^2}{R}$t, VIt, qV, LI^2, $\frac{q^2}{C}$, CV^2 जहाँ I = धारा, t = समय, q = आवेश, L = प्रेरकत्व , C = धारिता, R = प्रतिरोध

➢ **<u>भौतिकी में प्रयुक्त महत्पूर्ण विमायें</u>**

ऊष्मा

राशि	**मात्रक**	**विमायें**
ताप (T)	केल्विन	$[M^0L^0T^0\,\Theta^1]$
ऊष्मा (Q)	जूल	$[M^1L^2T^{-2}]$
विशिष्ट ऊष्मा (c)	जूल/(किग्रा–केल्विन)	$[M^0L^2T^{-2}\,\Theta^{-1}]$
ऊष्मा धारिता	जूल केल्विन	$[M^1L^2T^{-2}\,\Theta^{-1}]$
गुप्त ऊष्मा (L)	जूल/किग्रा	$[M^0L^2T^{-2}]$
गैस नियतांक (R)	जूल/(मोल x कैल्विन)	$[M^1L^2T^{-2}\,\Theta^{-1}]$
वोल्ट्जमैन नियतांक (K)	जूल/केल्विन	$[M^1L^2T^{-2}\,\Theta^{-1}]$
ऊष्मा चालकता गुणांक (K)	जूल/ (मीटर x सेकण्ड x केल्विन)	$[M^1L^1T^{-3}\,\Theta^{-1}]$
स्टीफन नियतांक (σ)	(वॉट) /(मीटर^2 केल्विन^4)	$[M^1L^0T^{-3}\,\Theta^{-4}]$
वीन नियतांक (b)	मीटर x केल्विन	$[M^0L^1T^0\,\Theta^1]$
प्लांक नियतांक (h)	जूल–सैकण्ड	$[M^1L^2T^{-1}]$
रेखीय प्रसार गुणांक (α)	कल्विन$^{-1}$	$[M^0L^0T^0\,\theta^{-1}]$

ऊष्मा का यांत्रिक तुल्यांक (A)	जूल / कैलोरी	$[M^0 L^0 T^0]$

विद्युत

राशि	मात्रक	विमायें
विद्युत आवेश (q)	कूलॉम	$[M^0 L^0 T^1 A^1]$
विद्युत धारा (I)	ऐम्पियर	$[M^0 L^0 T^0 A^1]$
धारिता (C)	कूलॉम / वोल्ट अथवा फैरड	$[M^{-1} L^{-2} T^4 A^2]$
विद्युत विभव (v)	जूल / कूलॉम या वोल्ट	$[M^1 L^2 T^{-3} A^{-1}]$
मुक्त आकाश की विद्युतशीलता (ϵ_0)	$\frac{\text{Coulomb}^2}{Newton - \text{metre}^2}$	$[M^{-1} L^{-3} T^4 A^2]$
परावैद्युतांक नियतांक (K)	मात्रकहीन	$[M^0 L^0 T^0]$
प्रतिरोध (R)	वोल्ट / ऐम्पियर अथवा ओम	$[M^1 L^2 T^{-3} A^{-2}]$
प्रतिरोधकता अथवा विशिष्ट प्रतिरोध (p)	ओम–मीटर	$[M^1 L^3 T^{-3} A^{-2}]$
स्वप्रेरण गुणांक (L)	$\frac{\text{volt} - \text{second}}{ampere}$ or henry or ohm-second	$[M^1 L^2 T^{-2} A^{-2}]$
चुम्बकीय फ्लक्स (Φ)	वोल्ट–सैकण्ड अथवा बेवर	$[M^1 L^2 T^{-2} A^{-1}]$
चुम्बकीय–प्रेरण (B)	$\frac{\text{newton}}{ampere - metre}$ $\frac{\text{Joule}}{ampere - metre^2}$ $\frac{\text{volt} - \text{second}}{metre^2}$ or Tesla	$[M^1 T^{-2} A^{-1}]$
चुम्बकन तीव्रता (H)	ऐम्पियर / मीटर	$[L^{-1} A^1]$
चुम्बकीय द्विध्रुव आघूर्ण (M)	ऐम्पियर मीटर^2	$[M^0 L^2 T^0 A^1]$
मुक्त आकाश की चुम्बकनशीलता (μ_0)	$\frac{\text{Newton}}{ampere^2}$ Or $\frac{\text{joule}}{ampere^2 - \text{metre}}$ Or $\frac{\text{Volt} - \text{second}}{\text{ampere} - \text{metre}}$ Or $\frac{\text{Ohm} - \text{second}}{\text{metre}}$ Or $\frac{\text{henry}}{\text{metre}}$	$[M^1 L^1 T^{-2} A^{-2}]$
पृष्ठीय आवेश घनत्व (σ)	कूलॉम मीटर^2	$[M^0 L^{-2} T^1 A^1]$

विद्युत द्विध्रुव आघूर्ण (p)	कूलॉम मीटर	$[M^0 L^1 T^1 A^1]$
चालकता (G) (1/R)	ओम$^{-1}$	$[M^{-1} L^{-2} T^3 A^2]$
विशिष्ट चालकता (σ) (1/s)	ओम$^{-1}$ मीटर$^{-1}$	$[M^{-1} L^{-3} T^3 A^2]$
धारा घनत्व (J)	ऐम्पियर / मीटर^2	$[M^0 L^{-2} T^0 A^1]$
विद्युत क्षेत्र की तीव्रता (E)	वोल्ट / मीटर, न्यूटन / कूलॉम	$[M^1 L^1 T^{-3} A^{-1}]$
रिडवर्ग नियतांक (R)	(मीटर)$^{-1}$	$[M^0 L^{-1} T^0]$

- **विमीय विश्लेषण के अनुप्रयोगः–**

(1) **किसी भौतिक राशि का दी हुयी मात्रक पद्धतित में मात्रक ज्ञात करनाः–** किसी भौतिक राशि का सूत्र अथवा परिभाषा लिखने के लिये हम इसकी विमाये ज्ञात करते है। विमीय सूत्र में M, L, तथा T के स्थान पर आवश्यक पद्धति के मूलभूत मात्रक रखकर उस पद्धति में हम भौतिक राशि का मात्रक ज्ञात कर लेते है। फिर भी कभी–कभी इस मात्रक के लिए हम एक विशिष्ट नाम दे देते है।

उदाहरण के लिए– कार्य = बल **x विस्थापन**

अतः W = $[M^1 L^1 T^{-2}] \times [L^1]$

अतः CGC पद्धति में इसका मात्रक g cm^2/s^2 है जिसे अर्ग (erg) कहा जाता है। जबकि MKS पद्धति में kg m^2/s^2 होगा जिसे जूल कहते है।

(2) **भौतिक नियतांक अथवा गुणांक की विमाये ज्ञात करनाः–** चूँकि किसी भौतिक राशि की विमाये अद्वितीय होती है। अतः हमें सर्वप्रथम ऐस सूत्र अथवा व्यंजक लिखना चाहिए जिसमें वह नियतांक प्रयुक्त होता हो जिसकी विमा ज्ञात करनी है। तत्पश्चात् उस सूत्र में शेष सभी राशियों की विमाओं को प्रतिस्थापित करके, अज्ञात नियतांक की विमा प्राप्त की जा सकती है।

(i) गुरूत्वाकर्षण नियतांक : न्यूटन के गुरूत्वाकर्षण नियम से

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2} \quad \text{अथवा} \quad G = \frac{Fr^2}{m_1 m_2}$$

सभी भौतिक राशियों की विमायें रखने पर

$$G = \frac{[MLT^{-2}][L^2]}{[M][M]} = [M^{-1} L^3 T^{-2}]$$

(ii) प्लांक नियतांकः प्लांक के अनुसार $E = h\nu$ अथवा $h = \frac{E}{\nu}$

सभी भौतिक राशियों की विमाये रखने पर

$$[h] = \frac{[ML^2 T^{-2}]}{[T^{-1}]} = [M^1 L^2 T^{-1}]$$

(iii) श्यानता गुणांकः– पॉइसली सूत्र के अनुसार

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\Pi p r^4}{8\eta l} \quad \text{अथवा} \quad \eta = \frac{\Pi p r^4}{8l\,(dv/dt)}$$

सभी भौतिक राशियों की विमायें रखने पर

$$[\eta] = \frac{[ML^{-1}T^{-2}][L^4]}{[L][L^3/T]} = [M L^{-1} T^{-1}]$$

(3) **किसी भौतिक राशि को एक पद्धति से अन्य पद्धति में बदलना:–** भौतिक राशि की माप P = nu नियत होती है।

यदि किसी भौतिक राशि x का विमिय सूत्र $[M^aL^bT^c]$ है तथा यदि भौतिक राशि के (व्युत्पन्न) मात्रक दो पद्धतियों में क्रमशः $\left[M_1^a L_1^b T_1^c\right]$ तथा $\left[M_2^a L_2^b T_2^c\right]$ है तथा n_1 तथा n_2 इन दो पद्धतियों में क्रमशः आंकिक मान है तो $n_1 [u_1] = n_2 [u_2]$

$$\Rightarrow \quad n_1\left[M_1^a L_1^b T_1^c\right] = n_2\left[M_2^a L_2^b T_2^c\right]$$

$$\Rightarrow \quad n_2 = n_1 \left[\frac{M_1}{M_2}\right]^a \left[\frac{L_1}{L_2}\right]^b \left[\frac{T_1}{T_2}\right]^c$$

जहाँ M, L तथा R प्रथम (ज्ञात) पद्धति में द्रव्यमान, लम्बाई तथा समय के मूल मात्रक है तथा M, L तथा T द्वितीय (अज्ञात) पद्धति में द्रव्यमान लम्बाई तथा समय के मूल मात्रक है। अतः दोनों पद्धतियों में मूल मात्रकों के मान ज्ञात होने पर तथा प्रथम पद्धति में आंकिक मान ज्ञात होने पर अन्य पद्धति में आंकिक मान ज्ञात किया जा सकता है।

उदाहरण

(i) न्यूटन का डाइन में रूपान्तरण बल का SI मात्रक न्यूटन है तथा इसका विमीय सूत्र $[M^1L^1T^{-2}]$ है।

अतः $1\ N = 1\ kg\ m/\ sec^2$

$$n_2 = n_1 \left[\frac{M_1}{M_2}\right]^a \left[\frac{L_1}{L_2}\right]^b \left[\frac{T_1}{T_2}\right]^c$$ का प्रयोग करने पर

$$n_2 = 1 \left[\frac{Kg}{gm}\right]^1 \left[\frac{m}{cm}\right]^1 \left[\frac{sec}{sec}\right]^{-2}$$

$$n_2 = 1 \left[\frac{10^3 gm}{gm}\right]^1 \left[\frac{10^2 cm}{cm}\right]^1 \left[\frac{sec}{sec}\right]^{-2} = 10^5$$

$\therefore 1\ N = 10^5$ डाइन

(ii) **गुरुत्वाकर्षण नियतांक [G] को CGS से MKS पद्धति में बदलना:–**

CGS पद्धति में G का मान 6.67×10^{-8} C.G.S. मात्रक होता है जबकि इसका विमिय सूत्र $[M^{-1}L^3T^{-2}]$ है।

अतः $G = 6.67 \times 10^{-8}\ cm^3/g\ s^2$

$$n_2 = n_1 \left[\frac{M_1}{M_2}\right]^a \left[\frac{L_1}{L_2}\right]^b \left[\frac{T_1}{T_2}\right]^c$$ का प्रयोग करने पर

$$n_2 = 6.67 \times 10^{-8} \left[\frac{gm}{kg}\right]^{-1} \left[\frac{cm}{m}\right]^3 \left[\frac{sec}{sec}\right]^{-2}$$

$$n_2 = 6.67 \times 10^{-8} \left[\frac{gm}{10^3 gm}\right]^{-1} \left[\frac{cm}{10^2 cm}\right]^3 \left[\frac{sec}{sec}\right]^{-2}$$

$= 6.67 \times 10^{-11}$

$\therefore G = 6.67 \times 10^{-11}$ M.K.S. मात्रक

(4) **दिये गये भौतिक सम्बंध की विमीय रूप से सत्यता की जाँच करना:–** यह विमिय समानता के सिद्धान्त पर आधारित है। इस सिद्धान्त के अनुसार समीकरण के दोनों ओर के प्रत्येक विमायें अवश्य समान होनी चाहिये।

यदि $X = A \pm (BC)^2 \pm \sqrt{DEF}$

तो विमीय समांगता के सिद्धान्त से

$[X] = [A] = [(BC)^2] = [\sqrt{DEF}]$

यदि दोनों ओर के प्रत्येक पद की विमाये समान है तो समीकरण विमीय रूप से शुद्ध होगा। अन्यथा नहीं। विमीयं रूप से शुद्ध समीकरण आंकिक रूप से शुद्ध हो सकता है और नहीं भी।

उदाहरण :

(i) $F = mv^2 / r^2$

उपरोक्त सम्बन्ध में भौतिक राशियों की विमायें रखने पर

$[MLT^{-2}] = [M]\,[LT^{-1}]^2 / [L]^2$ अथवा $[MLT^{-2}] = [MT^{-2}]$

चूँकि उपरोक्त समीकरण में दोनों ओर की विमायें समान नहीं है, यह सूत्र विमिय रूप से शुद्ध नहीं है, अतः भौतिक रूप से भी शुद्ध नहीं हो सकता।

(5) **नये सम्बन्धों की स्थापना करना:–** यदि किसी भौतिक राशि की अन्य राशियों पर निर्भरता ज्ञात हो और यदि निर्भरता गुणनफल प्रकार की हो तो विमीय विश्लेषण का उपयोग करके, राशियों के मध्य सम्बन्ध स्थापित किया जा सकता है।

उदाहरण

(i) **सरल लोलक का आवर्तकाल:–** माना सरल लोलक का आवर्तकाल गोलक के द्रव्यमान (m) प्रभावी लम्बाई (l) गुयत्वीय त्वरण (g) पर निर्भर करता है तथा यह मानकर कि फलन m, l तथा g के घात फलनों के गुणनफल प्रकार का है।

अर्थात् $T = Km^x l^y g^z$ जहाँ K = विमाहीन नियतांक

यदि उपरोक्त सम्बन्ध विमीय रूप से शुद्ध है तो राशियों की विमाये इस समीकरण में रखने पर–

$[T] = [M]\,[L]\,[LT^{-2}]$ अथवा $[T] = [ML^2\,T^{-2}]$

समान राशियों की घातों की तुलना करने पर $x = 0$ $y = ½$ तथा $z = -1/2$

अतः भौतिक सम्बन्ध $T = K\sqrt{\frac{l}{g}}$

विमाहीन नियतांक का मान प्रयोगो से (2Π) पाया जाता है अतः $T = 2\Pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

➢ **Limitations of Dimensional Analysis:(विमीय समीकरणों के सीमाबन्धन)**

यद्यपि विमीय विश्लेषण बहुत उपयोग है लेकिन इसकी भी कुछ सीमायें है

(1) यदि किसी भौतिक राशि की विमाऐं दी है तो वह राशि अद्वितीय नहीं हो सकती क्योंकि कई भौतिक राशियों की विमायें समान होती है। उदाहरण के लिए– यदि किसी भौतिक राशि का विमिय सूत्र $[ML^2T^{-2}]$ है तो यह कार्य अथवा ऊर्जा अथवा बल आघूर्ण का विमीय सूत्र हो सकता है।

(2) आंकिक नियतांक [K] जैसे (1/2), 1 या 2Π आदि की कोई विमायें नहीं होती अतः इन्हें विमीय विश्लेषण विधि द्वारा ज्ञात नहीं किया जा सकता।

(3) विमीय विधि का प्रयोग गुणनफल से प्राप्त होने वाले अन्य फलनों के अतिरिक्त फलनों को व्युत्पन्न करने के लिये नही किया जा सकता है जैसे–

$s = u\,t + (1/2)\,at^2$ or $y = a\sin\omega t$

को इस विधि द्वारा व्युत्पन्न नहीं किया जा सकता, परन्तु इस समीकरणों की सत्यता की जाँच की जा सकती है।

(4) यदि कोई भौतिक राशि तीन से अधिक राशियों पर निर्भर करती हो तो उनके मध्य सम्बन्ध स्थापित नहीं किया जा सकता है क्योंकि तीन मूल राशियों M, L, T से तीन समीकरण ही स्थापित कर सकते है।

(5) इस विधि से उन सूत्रों को व्युत्पन्न नही किया जा सकता है जिनमें लघुगणकीय, चरघातांकी तथा त्रिकोणमितीय फलनों का उपयोग होता है तथा ना ही इनकी यथार्थता की जांच कर सकते है।

(6) यह इस प्रकार की कोई जानकारी नहीं देते जिससे राशि के अदिश या सदिश की जानकारी प्राप्त हो।

➢ सार्थक अंक (Significant Figures)

किसी भौतिक राशि के मापन में सार्थक अंक, उन अंकों की संख्या बताते है जिनमें हम पूर्ण आश्वस्त होते है। मापन में अधिक संख्या में सार्थक अंक प्राप्त होना मापन में अधिक शुद्धता को दर्शाता है। इसका विलोम भी सत्य है।

दी गई राशि के मापन में सार्थक अंकों की संख्या ज्ञात करते समय निम्न नियमों को ध्यान में रखें।

(1) सभी अशून्य अंक सार्थक होते है।

उदाहरणः– 42.3 में तीन सार्थक अंक है।
243.4 में चार सार्थक अंक है।
24.123 में पाँच सार्थक अंक है।

(2) दो अशून्य अंकों के बीच आने वाला शून्य अंक सार्थक अंक होता है।

उदाहरणः– 5.03 में तीन सार्थक अंक है।
5.604 में चार सार्थक अंक है।
4.004 में चार सार्थक अंक है।

(3) संख्या के बायीं ओर के शून्य कभी सार्थक अंक नहीं होते।

उदाहरणः– 0.543 में तीन सार्थक अंक होंगे।
0.045 में दो सार्थक अंक है।
0.006 में एक सार्थक अंक है।

(4) संख्या के दायी ओर के शून्य सार्थक अंक होते है।

उदाहरणः– 4.330 में चार सार्थक अंक होंगे।
433.00 में पाँच सार्थक अंक है।
343.000 में छ सार्थक अंक है।

(5) चरघातांकी निरूपण में, दी गई संख्या का आंकिक भाग ही सार्थक अंक बताता है।

उदाहरणः– 1.32×10^2 में तीन सार्थक अंक है।

1.32×10^2 में तीन सार्थक अंक है।

- **राशि को निश्चित सार्थक अंकों में व्यक्त करनाः–**

किसी दी गई राशि को निश्चित सार्थक अंकों वाली राशि में व्यक्त करने के निम्नलिखित नियम है–

(1) यदि निश्चित सार्थक अंकों के बाद छोड़ी जाने वाली संख्या 5 से कम होती है, तो उसके पूर्व की संख्या को अपरिवर्तित रहने देते है।

उदाहरणः $x = 7.82$ को दो सार्थक अंकों में $x = 7.8$ लिख सकते है। इसी प्रकार $x = 3.94$ को दो सार्थक अंकों में $x = 3.9$ लिखा जा सकता है।

(2) यदि छोड़ी जाने वाली संख्या 5 से अधिक होती है तो उसके पूर्व की संख्या को एक से बढ़ा देते है।

उदाहरणः $x = 6.87$ को दो सार्थक अंकों में $x = 6.9$ लिख सकते है। इसी प्रकार $x = 12.78$ को $x = 12.8$ लिखा जा सकता है।

(3) यदि छोड़ी जाने वाली संख्या 5 है तथा उसके बाद कोई अशून्य संख्या आती है तो उसके पूर्व की संख्या को एक से बढ़ा देते है।

उदाहरणः $x = 16.351$ को दो सार्थक अंकों में $x = 16.4$ लिख सकते है। इसी प्रकार $x = 6.758$ को $x = 6.8$ लिखा जा सकता है।

(4) यदि छोड़ी जाने वाली संख्या 5 है तथा उसके बाद कोई शून्य आता है तो उसके पूर्व की संख्या को अपरिवर्तित रहने देते है यदि यह सम संख्या है।

उदाहरणः $x = 3.250$ को दो सार्थक अंकों में $x = 3.2$ लिख सकते है। इसी प्रकार $x = 12.650$ को 12.6 लिखा जा सकता है।

(5) यदि छोड़ी जाने वाली संख्या 5 है तथा उसके बाई कोई शून्य आता है तो उसके पूर्व की संख्या को एक से बढ़ा देते है यदि यह विषम संख्या है।

उदाहरणः $x = 3.750$ को दो सार्थक अंकों में $x = 3.8$ लिख सकते है। इसी प्रकार $x = 16.150$ को $x = 16.2$ लिखा जा सकता है।

- **गणना में सार्थक अंकः–**

बहुत से प्रयोगो में अंतिम परिणाम प्राप्त करने के लिए विभिन्न प्रक्षेणों का आपस में जोड़, घटाव, गुणा अथवा भाग करना पड़ता है चूँकि प्रत्येक प्रेक्षण की शुद्धता का स्तर समान नहीं होता। अतः परिणाम की शुद्धता के बारे में कहा जा सकता है कि यह सबसे कम शुद्ध मापन में से अधिक शुद्ध नहीं हो सकती अतः किसी भी गणना में सही सार्थक अंक प्राप्त करने के लिए निम्न नियम ध्यान में रखने चाहिए।

(1) राशियों को जोड़ने अथवा घटाने पर प्राप्त फल में दशमलव के बाद कुल उतने ही अंक होने चाहिए जितने कि जोड़ने अथवा घटाने वाली किसी राशि में दशमलव के बाद कम से कम अंक होते है।

(i) 33.3 ← (केवल एक दशमलव स्थान रखता है)

3.11

+0.313

36.723 ← (उत्तर एक दशमलव स्थान तक होना चाहिए)

Answer = 36.7

(ii) 3.1421

0.241

+ 0.09 ← (2 दशमलव स्थान रखता है)

3.4713 ← (उत्तर भी 2 दशमलव स्थान तक लिखा जाना चाहिए)

Answer = 3.47

(2) दो मापी गई राशियों के गुणनफल अथवा भागफल में कुल उतने ही सार्थक अंक होते है कि कम से कम किसी दी गई राशि में है। इस नियम को निम्न उदाहरणों से समझा जा सकता है–

(i) 142.06

x 0.23 ← (two significant figures)

32.6738 ← (answer should have two significant figures)

Answer = 33

(ii) 51.028

x 1.31 ← (three significant figures)

66.84668

Answer = 66.8

(iii) $\frac{0.90}{4.26} = 0.2112676$

Answer = 0.21

- **परिमाण की कोटि (Order of Magnitude)**

संख्याओं के वैज्ञानिक निरूपण में संख्याओं को $M \times 10^x$ के रूप में व्यक्त किया जाता है। जहाँ M, 1 व 10 के बीच संख्या है तथा x पूर्णांक है। राशि के परिमाणा की कोटि 10 की घात के रूप में होगी। यह घात ज्ञात करने के लिए राशि के मान को संक्षिप्त करना पढ़ेगा। संक्षिप्तिकरण करते समय हम अंतिम अंक जो 5 से कम है को छोड़ देते है। यदि अंतिम अंक 5 अथवा 5 से अधिक हो, तो उसके पूर्व के अंक को 1 से बढ़ा कर देते है। उदाहरण के लिए,

(1) निर्वात में प्रकाश वेग

$= 3 \times 10^8\ ms^{-1} = 10^8\ m/s$ (चूँकि 3 < 5)

(2) इलेक्ट्रॉन का द्रव्यमान $= 9.1 \times 10^{-31} kg = 10^{-30}$ kg (चूँकि 9.1 > 5)

- **त्रुटि (Error):-**

किसी भी राशि के वास्तविक या सही मान एवं मापे गये मान का अन्तर ही त्रुटि कहलाती है।

त्रुटि के प्रकारः–

1. **क्रमबद्धः–** इस प्रकार की त्रुटियों का कारण ज्ञात करता होता है एवं इन त्रुटियों में कमी लाई जा सकती है।

(अ) यंत्रों के कारणः–

ये त्रुटि की संरचना के बनावट एवं निर्माण में त्रुटि के कारण उत्पनन होती है। एक ही यंत्र में विभिन्न पैमानों के शून्यांकों का मिलान न होने के कारण यंत्र में शून्यांक त्रुटि उत्पनन होती है। सुग्राही एवं उच्च गुणवत्ता के यंत्रों का उपयोग करके इस प्रकार की त्रुटि को कम किया जा सकता है।

(ब) व्यक्तिगत त्रुटिः–

इस प्रकार की त्रुटि किसी भी व्यक्ति की अनुभव की कमी के कारण उत्पन्न होती है। जैसः– किसी भी उपकरण का ठीक उसी प्रकार से समायोजन नही करना, उपकरण को असावधानी से रख कर पाठ्यांक लेना आदि से इस प्रकार की त्रुटि उत्पन्न होती है।

(स)**बाह्य कारकों के कारण त्रुटिः–** प्रयोग के समय ताप, दाब, वायु, वेग, आर्द्रता आदि बाह्य कारकों में परिवर्तन हो जाने से भी त्रुटि उत्पन्न होती है। इस प्रकार त्रुटि को कम करने के लिए बाह्य कारकों के प्रभाव को कम करना होगा।

(द) **नियत त्रुटिः–**

यदि सभी प्रक्षेणों में समान त्रुटि की पुनरावृत्ति होती है तब यह त्रुटि नियत त्रुटि कहलाती है।

2. **यादृच्छिक त्रुटि**

इस प्रकार की त्रुटियाँ अत्यधिक भिन्नता के कारण होती है। कभी–कभी इस प्रकार की त्रुटियाँ अवसरीय त्रुटि कहलाती है। यदि कोई व्यक्ति अपने पाठ्यांकों की पुनरावृत्ति करे तो व्यक्ति प्रत्येक प्रेक्षण में त्रुटि करता हैं एवं इस प्रकार की त्रुटि को अंक गणितीय माध्य के द्वारा कम करके शुद्धतम मान प्राप्त किया जा सकता है।

माना किसी राशि के लिये गये n पाठ्योंकों का मान क्रमशः a_1, a_2, a_3,.. a_n. तो शुद्ध मान

$$a_{\text{माध्य}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_n$$

यदि प्रेक्षणों की संख्या n गुना बढा दे तो त्रुटि $\frac{1}{n}$ गुना कम हो जाती है।

(3) **स्थूल त्रुटियाँ**

व्यक्ति की असावधानी के कारण मापन में जो त्रुटि प्रवेश कर जाती है। वह स्थूल या सम्पूर्ण त्रुटि कहलाती है। ये निम्न कारणों से उत्पन्न होती है।

- यंत्रों को बिना समायोजन के पाठ्यांक लेना।
- गलत तरीकों से पाठ्यांक लेना।
- पाठ्यांक लिखते समय गलती कर देना।
- गणना के समय पाठ्यांक गलत कर देना।

➢ मापन में त्रुटियाँ (Error of Measurement)

मापन प्रक्रिया आवश्यक रूप से एक तुलनात्मक प्रक्रिया है। हमारे बहुत प्रयासों के बावजूद किसी राशि का मापा गया मान, वास्तविक मान अथवा सत्यमान से कुछ न कुछ भिन्न प्राप्त होता है। वास्तविक मान तथा प्रायोगिक मान का यह अन्तर ही मापन में त्रुटि कहलाता है।

(1) **निरपेक्ष त्रुटिः–** किसी भौतिक राशि में निरपेक्ष त्रुटि, भौतिक राशि के वास्तविक मान तथा मापे गये मान के अन्तर के परिमाण के बराबर होती है।

माना एक भौतिक राशि को n बार मापा जाता है तथा इसके मापे गये मान a_1, a_2, a_3,.. a_n. है। तो इस मानों का समान्तर माध्य $a_m = \frac{a_1+a_2+ \ldots a_n}{n}$

सामान्यतः a_m को राशि का वास्तविक मान माना जाता है।

परिभाषा से मापे गये मानों में निरपेक्ष त्रुटि निम्न होगी–

$\Delta a_1 = a_m - a_1$

$\Delta a_2 = a_m - a_2$

$\Delta a_n = a_m - a_n$

निरपेक्ष त्रुटि किसी स्थिति में धनात्मक तथा अन्य स्थिति में ऋणात्मक हो सकती है।

(2) माध्य निरपेक्ष त्रुटिः– यह किसी राशि के मापन में प्राप्त सभी प्रेक्षणों की निरपेक्ष त्रुटियों के परिमाणों का समान्तर माध्य होती है। $\overline{\Delta a}$ से प्रदर्शित की जाती है। अतः

$$\overline{\Delta a} = \frac{|\Delta a_1|+|\Delta a_2|+\cdots.|\Delta a_n|}{n}$$

(3) **आपेक्षिक त्रुटि अथवा भिन्नात्मक त्रुटिः–** किसी मापन में आपेक्षिक त्रुटि अथवा भिन्नात्मक त्रुटि, माध्य निरपेक्ष त्रुटि तथा मापी गई राशि के माध्य मान का अनुपात होती है। अतः

$$\text{आपेक्षिक त्रुटि अथवा भिन्नात्मक त्रुटि} = \frac{\text{माध्य निरपेक्ष त्रुटि}}{\text{माध्यमान}} = \frac{\Delta a}{a_m}$$

(4) प्रतिशत त्रुटिः जब आपेक्षिक अथवा भिन्नात्मक त्रुटि को प्रतिशत में व्यक्त किया जाये तो यह प्रतिशत त्रुटि कहलाती है। अतः

प्रतिशत त्रुटि $= \frac{\Delta a}{a_m} \times 100\%$

➢ त्रुटियों का संयोजन (Propagation of Errors)

(1) राशियों के योग में त्रुटिः– माना $x = a + b$

माना Δa = a के मापन में निरपेक्ष त्रुटि

Δa = b के मापन में निरपेक्ष त्रुटि

Δx = x अर्थात् a तथा b के योग की गणना में निरपेक्ष त्रुटि

x में अधिकतम निरपेक्ष त्रुटि $\Delta x = \pm (\Delta a + \Delta b)$

x के मान में प्रतिशत त्रुटि $x = \frac{(\Delta a+\Delta b)}{a+b} \times 100\%$

(2) राशियों के अन्तर में त्रुटिः– माना $x = a - b$

माना Δa = a के मापन में निरपेक्ष त्रुटि

Δb = b के मापन में निरपेक्ष त्रुटि

Δx = x अर्थात् a तथा b के अन्तर की गणना में निरपेक्ष त्रुटि

x में अधिकतम निरपेक्ष त्रुटि $\Delta x = \pm (\Delta a+\Delta b)$

x के मान में प्रतिशत त्रुटि $x = \frac{(\Delta a+\Delta b)}{a-b} \times 100\%$

(3) राशियों के गुणनफल में त्रुटिः– माना $x = a \times b$

माना Δa = a के मापन में निरपेक्ष त्रुटि

Δb = b के मापन में निरपेक्ष त्रुटि

Δx = x अर्थात् a तथा b के गुणनफल के मापन में निरपेक्ष त्रुटि

x के मापन में अधिकतम भिन्नात्मक त्रुटि $\frac{\Delta x}{x} = \pm \left(\frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b}\right)$

x के मापन में प्रतिशत त्रुटि = (a के मान में प्रतिशत त्रुटि) + (b के मान में प्रतिशत त्रुटि)

(4) राशियों के विभाजन में त्रुटिः– माना $x = \frac{a}{b}$

माना Δa = a के मापन में निरपेक्ष त्रुटि

Δb = b के मापन में निरपेक्ष त्रुटि

Δx = x अर्थात् a तथा b के भाग की गणना में निरपेक्ष त्रुटि

x में अधिकतम भिन्नात्मक त्रुटि $\frac{\Delta x}{x} = \pm \left(\frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b}\right)$

x के मान में प्रतिशत त्रुटि = (a के मान में प्रतिशत त्रुटि) + (b के मान में प्रतिशत त्रुटि)

(5) **घातीय फलनों में त्रटिः माना** $x = \frac{a^n}{b^m}$

माना Δa = a के मापन में निरपेक्ष त्रुटि

Δb = b के मापन में निरपेक्ष त्रुटि

Δx = x की गणना में निरपेक्ष त्रुटि

x में अधिकतम भिन्नात्मक त्रुटि $\frac{\Delta x}{x} = \pm \left(n\frac{\Delta a}{a} + m\frac{\Delta b}{b}\right)$

x के मान में प्रतिशत त्रुटि =n (a के मान में प्रतिशत त्रुटि) +m (b के मान में प्रतिशत त्रुटि)